ベジェ曲面

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\ u^i(1-u)^{m-i}\ v^j(1-v)^{n-j} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
m,n: &\quad \text{次数}\\
P_{ij}: &\quad \text{制御点}\\
\binom{m}{i}= &\quad \frac{m!}{i!(m-i)!} \qquad\qquad \binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(m-j)!}
\end{aligned}$$

(1) において $n=0$ とするとベジェ曲線の式になる

$$P(u)=\sum_{i=0}^{m}P_i\binom{m}{i}\ u^i(1-u)^{m-i} \tag{2}$$

(1) で u について k 階偏微分、さらに v について l 階偏微分

$$\frac{\partial^{k+l}P(u,v)}{\partial u^k\,\partial v^l}=\sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{n-l}P'_{klij}\frac{m!}{i!(m-k-i)!}\cdot\frac{n!}{j!(n-l-j)!}\ u^i(1-u)^{m-k-i}\ v^j(1-v)^{n-l-j} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
P'_{00ij}= &\quad P_{ij}\\
P'_{klij}= &\quad P'_{(k-1)l(i+1)j}-P'_{(k-1)lij} \qquad (k\geqq 1)\\
= &\quad P'_{u(l-1)i(j+1)}-P'_{u(l-1)ij} \qquad (l\geqq 1)
\end{aligned}$$

(3) において $k=l=0$ とすると (1) になる
距離 $s=|P|=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}$ による微分

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{ds}= &\quad \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial u}}\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{1}{\frac{\partial s}{\partial v}}\frac{\partial P}{\partial v}\\
= &\quad s\left(\frac{1}{P\cdot\frac{\partial P}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{P\cdot\frac{\partial P}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}\right)P \qquad (4)\\
\frac{d^2P}{ds^2}= &\quad s^2\left(\frac{1}{P\cdot\frac{\partial P}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{P\cdot\frac{\partial P}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}\right)^2P\\
= &\quad s^2\left(\frac{1}{(P\cdot\frac{\partial P}{\partial u})^2}\frac{\partial^2P}{\partial u^2}+\frac{1}{(P\cdot\frac{\partial P}{\partial u})(P\cdot\frac{\partial P}{\partial v})}\frac{\partial^2P}{\partial u\partial v}+\frac{1}{(P\cdot\frac{\partial P}{\partial v})^2}\frac{\partial^2P}{\partial v^2}\right) \qquad (5)\\
\frac{d^2P}{ds^2}_{(v=const)}= &\quad s^2\frac{1}{(P\cdot\frac{dP}{du})^2}\frac{d^2P}{du^2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

円弧 （始点 P_0、終点 P_3、中心 O、半径 r）を３次ベジェ曲線に近似

$$P = P_0(1-u)^3 + 3P_1u(1-u)^2 + 3P_2u^2(1-u) + P_3u^3 \tag{7}$$

$u=0,\ u=0.5,\ u=1$ でベジェ曲線上の点が円弧上にあるとして P_1, P_2 を求める

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0 + a\,\overrightarrow{n_1} \\ P_3 + a\,\overrightarrow{n_2} \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$$a = r\frac{4(1-\cos\frac{\theta}{2})}{3\sin\frac{\theta}{2}} = r\frac{4}{3}\frac{\sqrt{1+cos\theta}-1-cos\theta}{\sin\theta} = r\frac{4}{3}\tan\frac{\theta}{4} \qquad (\theta = \angle P_0OP_3\ < \pi) \tag{8}$$

$\overrightarrow{n_1}$: 円弧平面で$\overrightarrow{OP_0}$に垂直な単位ベクトル（$\overrightarrow{P_0P_1}$方向）

$\overrightarrow{n_2}$: 円弧平面で$\overrightarrow{OP_3}$に垂直な単位ベクトル（$\overrightarrow{P_3P_2}$方向）

点 P と中心 O の距離の２乗 $\overline{OP}^2$ は、u の６次式で、極値５個のうち３個は、$u=0,\ u=\frac{1}{2},\ u=1$
残りの２個を $u = \frac{1}{2} \pm b \quad (0<b<0.5)$ とおき、$u' = u - \frac{1}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du'}\overline{OP}^2 &= C_1u'(u'-\frac{1}{2})(u'+\frac{1}{2})(u'-b)(u'+b) \qquad (C_1 = const) \\
&= C_1u'^5 - C_1(\frac{1}{4}+b^2)u'^3 + \frac{C_1}{4}b^2u' \\
\overline{OP}^2 &= \frac{C_1}{6}u'^6 - \frac{C_1}{4}(\frac{1}{4}+b^2)u'^4 + \frac{C_1}{8}b^2u'^2 + C_2 \qquad (C_2 = const) \qquad (9)
\end{aligned}$$

$u'=0,\ u'=\pm\frac{1}{2}$ のとき

$$P^2_{(u'=0)} = C_2 = r^2 \qquad \therefore\quad C_2 = r^2 \tag{10}$$

$$P^2_{(u'=\pm\frac{1}{2})} = \frac{C_1}{6}\frac{1}{64} - \frac{C_1}{4}(\frac{1}{4}+b^2)\frac{1}{16} + \frac{C_1}{8}b^2\frac{1}{4} + C_2 = r^2 \qquad C_1 \neq 0 \text{ だから}\quad b = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{11}$$

(9) に (10) (11) を代入して

$$\overline{OP}^2 = \frac{C_1}{6}u'^2(u'^2-\frac{1}{4})^2 + r^2 \tag{12}$$

C_1 を求める。(7) より

$$\begin{aligned}
P &= P_0(1-u)^3 + 3P_1u(1-u)^2 + 3P_2u^2(1-u) + P_3u^3 \\
&= u^3(-P_0+3P_1-3P_2+P_3) + (u\text{ の２次以下の式}) \\
\overline{OP}^2 &= u^6(-P_0+3P_1-3P_2+P_3)^2 + (u\text{ の５次以下の式}) \\
\frac{C_1}{6} &= (-P_0+3P_1-3P_2+P_3)^2 \\
&= (2P_0 + 3a\,\overrightarrow{n_1} - 3a\,\overrightarrow{n_2} - 2P_3)^2
\end{aligned}$$

中心 O を原点 $(0,0,0)$ として考えると $P_0^2 = P_3^2 = r^2,\ \ \overrightarrow{n_1}^2 = \overrightarrow{n_2}^2 = 1,\ \ P_0\cdot\overrightarrow{n_1} = P_3\cdot\overrightarrow{n_2} = 0,$
$P_0\cdot\overrightarrow{n_2} = P_3\cdot\overrightarrow{n_1} = r\sin(\theta),\ \ P_0\cdot P_3 = r^2\cos(\theta)\ \ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = -\cos(\theta)$ なので (8) を代入して

$$\frac{C_1}{6} = \frac{8r^2\left(\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{2}\right)^4}{1-\cos\theta} \tag{13}$$

区間 $0 \leqq u \leqq 1$ の最大誤差は、$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} = \binom{0.211325...}{0.788675...}$ (即ち $u' = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$) のときで

$$\overline{OP}^2_{(}u' = \pm b) = \frac{r^2\left(\sqrt{1+\cos\theta} - \sqrt{2}\right)^4}{54(1-\cos\theta)} + r^2 \qquad (max\ of\ \overline{OP} - r) \fallingdotseq \frac{r\left(\sqrt{1+\cos\theta} - \sqrt{2}\right)^4}{108(1-\cos\theta)} \tag{14}$$

誤差が 0.01 以下になるためには

$$\theta = 90 \text{ のとき} \quad r < 36.7$$
$$\theta = 45 \text{ のとき} \quad r < 2355$$